物理数学演習 II — (1)
— 複素数 —

（演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます）

Note 1a. 複素共役

複素数 $z = x + iy$ に対して $z^* = x - iy$ を z の**共役複素数**、あるいは z の**複素共役**という。ときに z から z^* をつくるとき z の複素共役をとるということがある。

$$\mathrm{Re}\, z = x = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = y = \frac{z - z^*}{2i}, \quad (z^*)^* = z, \quad (zw)^* = z^* w^* \tag{1.1}$$

Note 1b. 複素数の絶対値

複素数 $z = a + ib$ に対して実数値 $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$ を z の**絶対値**という。

$$\begin{aligned} &|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \ (w \neq 0), \\ &||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w| \ (\text{三角不等式}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Note 1c. 複素平面

すべての複素数 $z = x + iy$ に対して 2 次元直交座標 (x, y) で表される平面上の点が 1 対 1 に対応している。この対応で複素数全体を表すと考えたとき、これを**複素平面**、**z-平面**または **Gauss 平面**という。また、複素平面の x 軸と y 軸をそれぞれ**実軸**、**虚軸**という。

Note 1d. 極形式

複素平面上で 2 次元極座標 (r, θ) を用いて複素数を表したとき、$\theta = \arg z$ を複素数 z の**偏角**という。したがって複素数 z は次の**極形式**でも表すことができる。

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta, \quad r = |z|, \ \theta = \arg z$$

偏角には $2n\pi$ (n は整数) の不定性があるので、値を $-\pi < \theta \leq \pi$ に制限したものを $\mathrm{Arg}\, z$ と記すことがある。

実数 θ に対して定まる複素数 $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を**位相因子**とよぶことにする（これが複素指数関数の特別な場合であることは次の演習 (2) で）。これを用いると極形式は $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ と表すことができる。位相因子について次のことが成り立つ。

$$|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1, \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}, \qquad \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \tag{1.3}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}. \tag{1.4}$$

Note 1e. 複素数列の収束

複素数列 $\{z_k = x_k + iy_k\}$ が複素数 $z = x + iy$ に収束する必要十分条件

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ かつ } \lim_{k\to\infty} y_k = y$$

複素数列 $\{z_k\}$ が収束すれば実数列 $\{|z_k|\}$ は収束する。

Note 1f. 複素級数の絶対収束

級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ が収束するとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ は収束する。このとき級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ は**絶対収束**するという。

[1.1] 複素数に対する根号（より一般には n 乗根）は注意して取り扱う必要があるかも知れない。次に示す $-1=1$ の証明の誤っている点を指摘せよ。

$$\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{1}{-1}}=\frac{1}{\sqrt{-1}},\quad \text{両辺に } \sqrt{-1} \text{ をかけて} \quad -1=1$$

[1.2] 複素数の基本的性質 (1.1),(1.2) の各式を証明せよ。

[1.3] ふたつの実数 x, y を用いて表される 2 行 2 列の行列

$$Z=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=xI+yJ$$

の集合を考える。次のことを証明せよ。これによってこの集合は複素数の集合と同型であることがわかる。

(1) この集合の任意の二つの要素 $Z=xI+yJ, W=uI+vJ$ に対して

$$Z=W \leftrightarrow x=u, y=v, \quad \text{とくに } Z=O \leftrightarrow x=0, y=0$$

(2) この集合は行列の加法と乗法について閉じていて、それぞれ交換法則が成り立つ。

(3) 減法と除法が定義できる。すなわち、Z がこの集合の要素ならば $-Z$ もこの集合の要素である。さらに $Z \neq O$ ならば Z^{-1} が存在してそれもこの集合の要素である。

(4) この集合から複素数への写像 $Z=xI+yJ \mapsto z=x+iy$ は 1 対 1 で $Z \mapsto z, W \mapsto w$ ならば

$$Z \pm W \mapsto z \pm w, \quad Z \cdot W \mapsto z \cdot w, \quad Z \cdot W^{-1} \mapsto \frac{z}{w}$$

[1.4] $\alpha, \beta(\neq 0)$ を複素数とし、s, t を実数とする。複素平面上で $z=\alpha+s\beta$ $(-\infty<s<\infty)$ が α を通る直線を表し、原点を通る直線 $w=it\beta$ $(-\infty<t<\infty)$ と直交することを示せ。その交点 z_0 を α, β を用いて表せ。また、$|z_0|$ が $|z|$ の最小値を与えることを確かめよ。

[1.5] 位相因子に関する式 (1.3),(1.4) を証明せよ。

[1.6] 次の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \cos^n\theta-\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots, \\
\sin n\theta &= \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots.
\end{aligned}$$

[1.7] 次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx=R_n(x)\cos\theta_n(x), \quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin kx=R_n(x)\sin\theta_n(x)$$

$$\text{ここで } R_n(x)=\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}, \quad \theta_n(x)=\frac{(n-1)x}{2}$$

[1.8] 実数 p が $|p|<1$ を満たすとき、次の等式（左辺が収束してその値が右辺に等しいこと）を証明せよ。

$$\sum_{k=0}^{\infty}p^k\cos kx=\frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}p^k\sin kx=\frac{p\sin x}{1-2p\cos x+p^2}.$$