物理数学演習 II — (2)
— 初等複素関数 —

（演習問題は `http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/` からダウンロードできます）

Note 2a. **多項式・有理式**

実数と同じように $f_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ を n 次の複素**多項式**または**有理整関数**という。ここで係数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ $(c_n \neq 0)$ は一般に複素数である。とくに係数がすべて実数であれば次のことが成り立つ。

$$f(z^*) = f^*(z), \qquad f(\alpha) = 0 \text{ ならば } f(\alpha^*) = 0 \tag{2.1}$$

多項式の比で表される関数を複素**有理式**または**有理関数**という。

Note 2b. **指数関数**

ここでは複素指数関数を無限級数で定義する。

$$\mathrm{e}^z = \exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2.2}$$

この級数はすべての複素数 z について絶対収束する。とくに z が純虚数 ix のときには実三角関数 $\cos x, \sin x$ の Taylor 級数展開との比較により位相因子 $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ と等しいことがわかる。複素指数関数について次の関係が成り立つ。

$$(\mathrm{e}^z)^* = \mathrm{e}^{z^*}, \qquad \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}, \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}, \tag{2.3}$$

とくに $z = x + iy, z_1 = x, z_2 = iy$ とすれば次の極形式が得られる。

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}, \qquad |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x, \qquad \arg \mathrm{e}^z = y + 2n\pi. \tag{2.4}$$

Note 2c. **双曲線関数・三角関数**

これらは指数関数を用いて定義され、z が実数のときには対応する実関数に等しい。

双曲線関数

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{2.5}$$

三角関数

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}. \tag{2.6}$$

Note 2d. **対数関数**

指数関数の逆関数、すなわち $\mathrm{e}^w = z$ を満たすような複素数を $w = \log z$ として定義する。偏角の不定性 (**Note 1c**) によって対数関数は無限多価関数となる。実対数関数を $\ln x$ と表せば

$$\log z = \ln |z| + i\mathrm{Arg}\ z + 2n\pi i, \qquad n \text{ は整数} \tag{2.7}$$

とくに $n = 0$ の関数を対数関数の**主値**といい、

$$\ln z = \ln |z| + i\mathrm{Arg}\ z \tag{2.8}$$

と記すことがある。正の実数 $z = x$ に対しては $\mathrm{Arg}\ x = 0$ なので実対数関数に一致する。

Note 2e. 冪（べき）関数

複素数 a に対して冪関数を次のように定義する。

$$z^a = \exp(a \log z) \tag{2.9}$$

$\log z$ の多価性に起因して冪関数もまた多価関数となる。とくに冪数 a が既約分数 $a = m/n$ で表される実数のときは n 価関数となる。

[2.1] n 次の複素多項式 $f(z)$ について次の問に答えよ。

(1) 実係数の場合に成り立つ式 (2.1) を証明せよ。

(2) n 次の複素多項式 $f(z)$ に対し、$f(\alpha) = 0$ となる複素数 α があるとする。このとき

$$f(z) = (z - \alpha) g(z) \tag{2.10}$$

をみたす $n-1$ 次の複素多項式 $g(z)$ がただ一つ存在することを示せ。

[2.2] 複素指数関数について次の問に答えよ。

(1) 任意の複素数 z に対して級数 (2.2) が絶対収束することを示せ。

(2) 指数関数の定義が (2.2) であるとして関係式 (2.3) を証明せよ。

[2.3] 複素双曲線関数と複素三角関数について次の等式を証明せよ。

(1) $\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z, \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(2) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad \sinh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \sinh z_2 + \sinh z_1 \cosh z_2$

(3) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad \sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2$

(4) $\tanh z \equiv \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ (定義), $\quad \tanh(z_1 + z_2) = \dfrac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2}, \quad \tan(z_1 + z_2) = \dfrac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}$

[2.4] 次の問に答えよ。

(1) 複素対数関数は多価関数なので等式

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \tag{2.11}$$

は、これをみたすように $z_1, z_2, z_1 z_2$ の偏角を選ぶことができる、という意味である。これを示せ。

(2) 偏角を主値に限った対数関数では $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ は一般には成り立たない。不成立の例をひとつあげよ。

[2.5] 複素双曲線関数と複素三角関数の逆関数について次の問に答えよ。

(1) 次の等式を示せ。

$$\cosh^{-1} z = \log\left\{z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad \sinh^{-1} z = \log\left\{z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

(2) $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z, \tan^{-1} z$ を $\log$ を用いて表せ。

[2.6] 有理関数 $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ で定義される z から w への写像 $w = f(z)$ を **1 次分数写像**または **Möbius 写像**という。ここで a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ をみたす複素数である。この写像によって単位円 $|z| = 1$ が w-平面の円に写像されることを示せ。ただし $|c| \neq |d|$ とする。