物理数学演習 II — (3)
— Cauchy–Riemann の方程式 —

（演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます）

Note 3a. 写像

複素関数 $w = f(z)$ は z-平面から w-平面への**写像**とみなすことができる。$f(z)$ が定義されている z-平面上の領域を $f(z)$ の**定義域**といい、それが写像される w-平面上の領域を**値域**という。定義域の中のある領域 D の各点 z が写像される点 w の集合 D' を $D' = f(D)$ と記すことがある。

Note 3b. 極限・連続

正の実数 $\epsilon > 0$ が与えられたとき、$|z - z_0| < \epsilon$ を満たす z の集合は複素平面上で中心 z_0 半径 ϵ の円内の複素数全体である。この領域を z_0 の ϵ **近傍**といい、$V_\epsilon(z_0)$ と記すことがある。複素数の**極限** $z \to z_0$ とは一般には $\epsilon \to 0+$ のことを指し、その近づき方を問題にしない。

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ について、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$f(V_{\delta(\epsilon)}(z_0) \cap D) \subset V_\epsilon(w_0)$$

をみたすような $\delta(\epsilon) > 0$ をとることができるとき、w_0 を $f(z)$ の $z \to z_0$ における**極限値**といい、$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ と記す。必ずしも $z_0 \in D$ である必要はない。

$z_0 \in D$ で $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ のとき、$f(z)$ は z_0 で**連続**であるという。$f(z)$ が複素平面上のある領域のすべての点で連続であるとき、その領域で連続であるという。

Note 3c. 微分可能・正則点・特異点

複素関数 $f(z)$ が極限値 $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ をもつとき、$f(z)$ は z で**微分可能**であるという。その極限値を**微分係数**または**導関数**といい、$f'(z), \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ などと記す。z の近傍の各点で微分可能であるとき（$V_\epsilon(z)$ の各点で微分可能であるような ϵ-近傍が存在するとき）z を $f(z)$ の**正則点**という。ある領域の各点で $f(z)$ が正則であるとき、その領域で正則であるという。$f(z)$ の正則でない点を $f(z)$ の**特異点**という。

Note 3d. Cauchy–Riemann の微分方程式

点 $z = x + iy$ で複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が微分可能であるための必要十分条件は、2 実変数実関数 $u(x, y), v(x, y)$ の偏微分が連続かつ次の **Cauchy–Riemann の連立偏微分方程式**をみたすことである（**Cauchy–Riemann の条件**）。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Note 3e. 調和関数

2 実変数実関数 $F(x, y)$ に対する偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ を 2 次元 Laplace 方程式といい、その解 $F(x, y)$ を 2 次元**調和関数**という。複素関数が $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則であれば $u(x, y), v(x, y)$ はともに調和関数となる。

Note 3f. 等角写像

ある領域で正則な関数 $w = f(z)$ の写像で、z を微小量 δz だけずらすと写像点 w も微小量 δw だけずれ、$\delta w = f'(z)\delta z$ が成り立つ。2 つの微小量 $\delta z_1, \delta z_2$ に対応する写像のずれをそれぞれ $\delta w_1, \delta w_2$ とすれば、$f'(z) \neq 0$ ならば $\dfrac{\delta w_2}{\delta w_1} = \dfrac{\delta z_2}{\delta z_1}$ が成り立つ。したがって $\delta z_1, \delta z_2$ の間の角度はこの写像によって保存される。このような性質を**等角写像性**という。

[3.1] 複素平面 ($|z| < \infty$) に無限遠点 ∞ を加えて拡張したものを拡大複素平面と呼ぼう。$f(z)$ の $z \to \infty$ への極限として $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} f(\frac{1}{w})$ と定義する。次のことを証明せよ。

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha \Longleftrightarrow {}^{\forall}\epsilon > 0\ {}^{\exists}\delta > 0 \text{ such that } |z| > \delta \to |f(z) - \alpha| < \epsilon$$

[3.2] 次の関数が連続となる領域、微分可能となる領域、正則となる領域はそれぞれどこか。

$$(a)\quad f(z) = \mathrm{e}^z, \qquad (b)\quad f(z) = \frac{1}{z}, \qquad (c)\quad f(z) = z|z|, \qquad (d)\quad f(z) = z^*.$$

[3.3] $f(z), g(z)$ を D で正則な関数とする。Cauchy–Riemann の条件を用いて次のことを示せ。

(1) $f(z) \pm g(z)$ と $f(z)g(z)$ はともに D で正則であり、その導関数はそれぞれ $f'(z) \pm g'(z), f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ となる。

(2) $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ は $f(z) = 0$ となる z を除いて D で正則であり、その導関数は $\dfrac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{f(z)^2}$ となる。

(3) $f(z)$ の D に対応する値域 $f(D)$ が $h(z)$ の正則領域に含まれれば $h(f(z))$ は D で正則であり、その導関数は $h'(f(z))f'(z)$ となる。

(4) $F(z) = f^*(z^*)$ は D^* で正則である。

(5) $f^*(z)$ も D で正則ならば $f(z)$ は定数である。

[3.4] 領域 D で正則な関数 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ に対して、$w = f(z)$ をみたす逆関数 $z = g(w) = f^{-1}(w)$ の導関数を調べる。

(1) $f'(z) = 0$ となる必要十分条件は $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$ であることを示せ。

(2) $f'(z) = 0$ となる点に対応する $w = f(z)$ を除く $f(D)$ で $g(w)$ は正則であり、その導関数は $g'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ で与えられることを示せ。

[3.5] 次の関数の特異点とそれ以外の点での導関数を求めよ。

$$(a)\quad \cot z, \qquad (b)\quad \log z, \qquad (c)\quad \sin^{-1} z, \qquad (d)\quad \tanh^{-1} z.$$

[3.6] $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ を 2 実数変数の複素関数とする。複素数 $z = x + iy$ を導入すると $w(x,y)$ を次のように書き換えることができる。

$$f(z, z^*) = w\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right)$$

u, v が Cauchy–Riemann の方程式をみたすならば、$\dfrac{\partial f}{\partial z^*} = 0$、すなわち $f(z, z^*)$ が z のみの関数になり、z^* に依存しないことを示せ。

[3.7] 極形式での Cauchy–Riemann の方程式を考える。

(1) 2 次元の Laplacian $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ の極座標表示を求めよ。

(2) 正則関数 $w = f(z)$ において極形式 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}, w = R\mathrm{e}^{i\Theta}$ を用いれば $f(r\mathrm{e}^{i\theta}) = R(r,\theta)\mathrm{e}^{i\Theta(r,\theta)}$ と表すことができる。(R, Θ は実変数 r, θ の実関数)。このとき Cauchy–Riemann の方程式が

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

となることを示せ。

(3) 上の Θ と $\log R$ はともに調和関数であることを示せ。

[3.8] 正則関数 $f(z=x+iy)$ の実部が $u(x,y)=x^3-3x^2y+axy^2+by^3$ で与えられるとき、

(1) a,b を求め、$f(z)$ を z の関数として表せ。

(2) $u(x,y)$ を虚部に持つような正則関数 $g(z)$ を求めよ。

[3.9] 領域 D で正則な関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ について

(1) u,v はともに Laplace 方程式をみたすこと（調和関数であること）を示せ。

(2) u,v は $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ の関係をみたすことを示せ。

(3) z_0 に対して $w_0=f(z_0)=u_0+iv_0$ とする。方程式 $u(x,y)=u_0$ と $v(x,y)=v_0$ はそれぞれ z-平面上での曲線を定める。この二つの曲線は z_0 で互いに垂直に交差することを示せ。

[3.10] * 複素数上の線形空間 V に対して、次の性質をもつ 2 変数 $a,b\in V$ の複素関数 $\psi(a,b)$ を導入する。

(1) $\psi(b,a)=\psi^*(a,b)$　　(2) $\psi(a,a)$ は負でない実数 $(\psi(a,a)\geq 0)$

(3) $\psi(a,a)=0 \Longleftrightarrow a=0$　　(4) $\psi(a,b+\lambda c)=\psi(a,b)+\lambda\psi(a,c)$, ($\lambda$ は複素数)

この関数は V にひとつの内積を定める。このとき次の Schwarz の不等式が成り立つ。

$$\sqrt{\psi(a,a)}\sqrt{\psi(b,b)}\geq|\psi(a,b)|$$

これを次の手順で証明せよ。

(1) $a,b\in V$ が与えられたとき、複素数 λ の関数

$$f(\lambda,\lambda^*)=\psi(a,a)+\lambda\psi(a,b)+\lambda^*\psi^*(a,b)+\lambda\lambda^*\psi(b,b)$$

は負でない実数値をとることを示せ。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda^*}=0$ をみたす $\lambda=\lambda_0$ を求め、$f(\lambda_0,\lambda_0^*)\geq 0$ から Schwarz の不等式を導け。

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}=0$ からも同じ結論を導けることを示せ。

(4) $F(x,y)=f(x+iy,x-iy)$ として、$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ からも同じ結論を導けることを示せ。

[3.11] * 2 次元空間の単連結領域 D で定義された調和関数 $u(x,y)$ が与えられている。

(1) D 内を通って 2 点 P,Q 結ぶ経路 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$ は D 内の積分経路によらないことを示せ。

(2) 上の事実から、この線積分は D 内の関数 $v(x,y)$ を定める。特に (x_0,y_0) と (x_0,y)、(x_0,y) と (x,y) を結ぶ線分がともに D に含まれるとき、

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y')\mathrm{d}y'-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(x',y)\mathrm{d}x'$$

となる。この関数が Cauchy–Riemann の微分方程式をみたす調和関数であること、すなわち関数 $u(x,y)+iv(x,y)$ が $z=x+iy$ の正則関数となることを示せ。

(3) この問題は与えられた調和関数を実部に持つ正則関数を求める方法になっている。与えられた調和関数を虚部に持つ正則関数を求める方法を考えよ。

[3.12] * 性質の良い 2 実変数の実関数 $w(x,y)$ は次のような展開を持つ。

$$w(x+\xi,y+\eta)=w(x,y)+\xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\xi\eta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\xi,\eta\ \text{の 3 次以上の項}$$

領域 D における正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を考え、u,v がそれぞれこの展開を持つと仮定する。

(1) D 内の点 z_0 で $f'(z_0)=0$ となるならば、その点は u,v の鞍点になっていることを示せ。

(2) u,v は D 内で最小値や最大値を持たないことを示せ。