物理数学演習 II — (4)
— 複素積分と Cauchy の積分定理 —

(演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます)

Note 4a. 経路

ある区間 $a \le s \le b$ で定義されたふたつの実関数 $x(s), y(s)$ が区分的に滑らかなとき (連続かつ有限個の s の点を除き微分が連続なとき), 2 次元座標 $(x(s), y(s))$ はパラメータ s の変化とともに区分的に滑らかな曲線を描く。これを始点 $(x(a), y(a))$ から終点 $(x(b), y(b))$ へむかう (向きのついた) 経路または曲線といい、$(x(s), y(s))$ を経路のパラメータ表示という。複素平面上では実変数の複素関数 $z(s) = x(s) + iy(s)$ が経路のパラメータ表示となる。とくに始点と終点が同じであるとき、その経路を (向きのついた) 閉経路または閉曲線という。

経路のパラメータ表示は一通りではない。区間 $a' \le t \le b'$ で定義された滑らかな単調増加関数 $s = \sigma(t)$ $(a = \sigma(a'), b = \sigma(b'))$ を用いて $X(t) = x(\sigma(t)), Y(t) = y(\sigma(t))$ とすれば、$(X(t), Y(t))$ は $(x(s), y(s))$ と同じ経路を表す別のパラメータ表示となる。

自分自身と交わらない閉曲線を **Jordan** 曲線ということがある。ここではとくに断らない限り閉曲線を Jordan 曲線の意味に使うことにする。

Note 4b. 複素積分

パラメータ表示 $z(s)$ $(a \le s \le b)$ で与えられた経路 C と複素関数 $f(z)$ に対し

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(s))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \tag{4.1}$$

という積分を $f(z)$ の C に沿った複素積分という。

とくに C が閉経路のとき $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ と記すことがある。$z(s) = x(s) + iy(s)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とすれば、複素積分の実部と虚部は 2 次元の線積分を用いて次のように表される。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_C (v\mathrm{d}y + u\mathrm{d}x). \tag{4.2}$$

複素平面上の点 α から β へ向かう経路 C に対し、同じ曲線をたどって β から α へ向かう経路を $-C$ と記すことがある。また、β から γ へ向かう経路 C' があるとき、C と C' をたどって $\alpha \to \beta \to \gamma$ と動く経路を $C + C'$ と記すことがある。このとき、

$$\int_{-C} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z, \qquad \int_{C+C'} f(z)\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_{C'} f(z)\mathrm{d}z. \tag{4.3}$$

Note 4c. Cauchy の積分定理

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C の上とその内部で正則であれば

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{4.4}$$

となる。これを **Cauchy** の積分定理という。

この定理によって、閉経路 C_1 が $f(z)$ の正則領域だけを通って別の閉経路 C_2 に連続変形ができるとき

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.5}$$

が成り立つことがわかる。

Note 4d. 原始関数

領域内の任意の閉経路の内部がその領域に含まれるとき、その領域を単連結領域という。

単連結領域 D で正則な複素関数 $f(z)$ に対して、D 内の固定した点 z_0 から z へ向かう経路 C 上の積分で定義される関数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + F(z_0) \tag{4.6}$$

の値は経路 C によらない（$F(z_0)$ は積分定数）。この関数を $f(z)$ の原始関数または不定積分という。$F(z)$ は

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = f(z) \tag{4.7}$$

をみたすので D 内で正則である。原始関数を用いると D 内の任意の 2 点 α, β を結ぶ積分の値が

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = F(\beta) - F(\alpha) = [F(z)]_{\alpha}^{\beta} \tag{4.8}$$

と表されることがわかる。

[4.1] ある経路 C のパラメータ表示を $z(s) = x(s) + iy(s)$ $(a \le s \le b)$ とする。また、$\sigma(t)$ を $a' \le t \le b'$ で定義された単調増加関数で、$\sigma(a') = a, \sigma(b') = b$ をみたすものとする。$\zeta(t) = z(\sigma(t)) = x(\sigma(t)) + iy(\sigma(t))$ とすれば、これは C の別なパラメータ表示を与える。このとき $\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ であること、すなわち経路積分はパラメータ表示のとり方によらないことを示せ。

[4.2] 複素平面上の点 z_0 を中心とする半径 R の円周上を左周りに一周する経路 C のパラメータ表示を求め、それを用いて積分を実行することにより、

$$\oint_C (z - z_0)^{n-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\ \delta_{n,0}, \qquad n \text{ は整数} \tag{4.9}$$

を証明せよ。

[4.3] 複素平面上の二点 α から β への直線経路を $\Gamma_{\alpha,\beta}$ とする。

(1) $\Gamma_{\alpha,\beta}$ のパラメータ表示をひとつ求めよ。

(2) 上で求めたパラメータ表示を用いて積分することによりつぎの等式を証明せよ。

$$\int_{\Gamma_{\alpha,\beta}} z^n\mathrm{d}z = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.10}$$

(3) 任意の形の N 角形の辺のつくる閉経路 C 上に沿った積分について、次のことを示せ。

$$\oint_C z^n\mathrm{d}z = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.11}$$

[4.4] $f(z) = z^*$ は正則ではないがこの関数の積分は面白い性質をもっている。

(1) 複素平面上の二点 α から β への直線経路を $\Gamma_{\alpha,\beta}$ とする。(i) $C_1 = \Gamma_{\alpha,\beta}$, (ii) $C_2 = \Gamma_{\alpha,\gamma} + \Gamma_{\gamma,\beta}$ の二つの経路に沿ってそれぞれ $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} z^*\mathrm{d}z$ を計算せよ。ここで α, β, γ は同一直線上にはないものとする。

(2) α, β, γ のつくる三角形の辺を左周りに周回する閉経路 C に沿っての積分が $\displaystyle\oint_C z^*\mathrm{d}z = 2iS$ となることを示せ。ここで S はこの三角形の面積である。

(3) 上の事実を用いて、任意の形の N 角形の辺を左周りに周回する閉経路 C に沿っての積分が $\displaystyle\oint_C z^*\mathrm{d}z = 2iS$

となることを示せ。ここで S はこの N 角形の面積である。またこのことから

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \oint_C x\mathrm{d}y = -\oint_C y\mathrm{d}x \tag{4.12}$$

という関係が成立することを示せ。

[4.5] 経路を C のパラメータ表示を $z(s) = x(s) + iy(s)$ $(a \leq s \leq b)$ とする。

(1) 次の積分は C の長さを表すことを示せ。

$$L_C = \int_C |\mathrm{d}z| = \int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right| \mathrm{d}s \tag{4.13}$$

(2) 次の不等式 (三角不等式) を示せ。

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)| \cdot |\mathrm{d}z| \leq M \cdot L_C \tag{4.14}$$

ここで $M = \max_C |f(z)|$ は C における $|f(z)|$ の最大値である。

[4.6] 次の問に答えよ。

(1) **Note 4d** を証明せよ。

(2) 単連結領域 D で正則な関数 $f(z), g(z)$ の原始関数をそれぞれ $F(z), G(z)$ とする。D 内の経路積分について部分積分の公式

$$\int_{z_0}^{z} F(\zeta)g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z)G(z) - F(z_0)G(z_0) - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)G(\zeta)\mathrm{d}z \tag{4.15}$$

が成立することを示せ。