物理数学演習 II — (5)
— Cauchy の積分表示 —

（演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます）

Note 5a. Cauchy の積分表示

左まわりの閉経路 C の上とその内部 D で正則な関数 $f(z)$ に対して、$z \in D$ ならば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \tag{5.1}$$

が成り立つ。

これを示すには両辺の差の絶対値が 0 であることを示せばよい。$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は ζ の関数としては D から z を取り除いた領域で正則であるから、z を中心とし半径 r の円周上を左まわりにまわる閉経路 $\mathit{\Gamma}_r$ が D に含まれれば、C を $\mathit{\Gamma}_r$ に連続変形することができて積分値は等しい。ゆえに

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathit{\Gamma}_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - f(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\mathit{\Gamma}_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right| \leq M \cdot r$$

が $\mathit{\Gamma}_r \subset D$ であるすべての r について成り立つ。ここで最初の等式に (4.9) の $n = 0$ を、不等式に (4.14) を用いた。したがって $\lim\limits_{r \to 0} M = |f'(z)| < \infty$ であるから左辺は 0 である。

Note 5b. Goursat の定理

Cauchy の積分表示 (5.1) の右辺を用いて導関数 $f'(z)$ を求めると

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta \tag{5.2}$$

が得られる。これを繰り返せば n 階の導関数 $f^{(n)}(z)$ が

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \tag{5.3}$$

と表され、任意の n 階微分が $f(z)$ の積分で与えられることがわかる。したがって $f(z)$ が D で正則ならばその各点で何回でも微分可能である。また、D の各点で $f^{(n+1)}(z)$ が存在するので $f^{(n)}(z)$ は D で正則である。

まとめると、$f(z)$ が D で正則ならば任意の n に対して $f^{(n)}(z)$ が存在し D で正則である。これを **Goursat の定理**という。

Note 5c. Morera の定理

（Caushy の積分定理の逆） 単連結領域 D で連続な関数 $f(z)$ が任意の閉経路 C に対して $\displaystyle\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$ をみたすならば、$f(z)$ は D で正則である。

仮定によって経路によらない不定積分 $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ を定義することができ、$F'(z) = f(z)$ をみたすので $F(z)$ は D で正則である。したがって、Goursat の定理によって $f(z)$ もまた D で正則となる。

Note 5d. Taylor 級数展開

関数 $f(z)$ が z_0 で正則ならば、$|z - z_0| < R$ なる円内のすべての z に対して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n, \qquad c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{5.4}$$

の右辺の級数が左辺に絶対収束するような半径 R が存在する。この級数を z_0 のまわりでの $f(z)$ の **Taylor 級数（展開）**といい、R の上限値をその**収束半径**という。

[**5.1**] **代数学の基本定理**とは n 次の多項式の方程式

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = 0, \qquad (c_n \neq 0)$$

が重解を含めて n 個の複素数解をもつということである。これを証明しよう。

(1) すべての複素数 z に対して $f(z)$ が正則でありかつ有界、すなわち $|f(z)| \leq M$ なる正定数 M が存在すれば $f(z)$ は一定であることを示せ。これを **Liouville の定理**という。
Hint:$f(z_1)$ と $f(z_2)$ のそれぞれに Cauchy の積分表示を用いてその差の絶対値が 0 になることを示せ。

(2) $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ に上の定理を適用して $P(z) = 0$ となる z が存在することを示し、それと [**2.1**] の結果から基本定理を証明せよ。

[**5.2**] 閉経路 C 上とその内部領域 D で正則な関数 $f(z)$ が定数関数ではないならば、D には $|f(z)|$ の最大値は存在しない。これを **最大値の原理** という。次の問に答えてこれを証明せよ。

(1) D に含まれる中心 z の円周上に $|f(z)| < |f(\zeta)|$ となる ζ が存在することを示せ。

(2) 最大値の原理を証明せよ。さらに、D と C 上で $f(z) \neq 0$ ならば、D には $|f(z)|$ の最小値も存在しないことを示せ。

[**5.3**] 複素関数 $f(z)$ が閉経路 C 上とその内部領域 D で正則で、$z_0 \in D$ であるとする。

(1) 数学的帰納法を用いて (5.3) を証明せよ。

(2) 中心を z_0 とする半径 R の円を $C_0(R, z_0)$ とする。この円が D に含まれるとき ($C_0(R, z_0) \subset D$)、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \qquad M = \max_{z \in C_0(R, z_0)} |f(z)| \tag{5.5}$$

(3) z_0 のまわりの $f(z)$ の Taylor 級数展開が $C_0(R, z_0)$ の内部で $f(z)$ に絶対収束すること (**Note 5d**) を示せ。

[**5.4**] 実数 ν についての次の二項定理を導き、その収束半径を求めよ。ただし、$\begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{n!}$ と定義する。

$$(1+z)^\nu = 1 + \nu z + \frac{\nu(\nu-1)}{2} z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} z^n \tag{5.6}$$

[**5.5**] 複素関数 $f(z)$ が領域 $|z| < R$ で正則かつ $|f(z)| \leq M$ で $f(0) = 0$ であるとする。

(1) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$ が存在することを示せ。この値を $g(0)$ とし $0 < |z| < R$ で $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ とすれば、$g(z)$ は $|z| < R$ で正則であることを示せ。

(2) 次の不等式

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|, \qquad |z| < R \tag{5.7}$$

が成り立ち、等号が成り立つのは $f(z) = \mathrm{e}^{i\phi} \dfrac{M}{R} z$ のときに限ることを示せ（ϕ は実定数）。

(3) $w = f(z), R = 1$ とし、$|f(z)| \leq M(|z| < 1)$ とする。$|z_0| < 1$ なる z_0 をとれば、

$$\left| \frac{w - w_0}{1 - w_0^* w} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - z_0^* z} \right|, \qquad |z| < 1 \tag{5.8}$$

が成り立つことを示せ。ここで $w_0 = f(z_0)$ である。等号はどのようなときに成り立つか。