物理数学演習 II — (6)
— 極と留数 —

(演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます)

Note 6a. Laurent 級数展開

二つの級数 $f_+(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$ と $f_-(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$ の和で定義された関数

$$f(z)=f_+(z-z_0)+f_-(\frac{1}{z-z_0})=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (6.1)$$

を考える。$f_+(\zeta), f_-(\zeta)$ の収束半径を $R_+, 1/R_-$ とすれば、$R_-<R_+$ のときは環状領域

$$\Delta=\{z \mid R_-<|z-z_0|<R_+\} \quad (6.2)$$

で $f(z)$ が絶対収束し正則である。この級数を **Laurent** 級数といい、$f_+(z-z_0)$ をその正則部、$f_-(\frac{1}{z-z_0})$ を主要部という。逆に環状領域 Δ で正則な関数 $f(z)$ は Laurent 級数で表され、Δ のなかを左まわりに一周する閉経路を C とすれば

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z_0)(z-z_0)^n,\qquad c_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (6.3)$$

となる。これを z_0 のまわりでの $f(z)$ の **Laurent** 級数 (展開) という。

Note 6b. 孤立特異点

複素関数 $f(z)$ がある特異点 z_0 の近傍では正則であるとき、z_0 を $f(z)$ の孤立特異点という。したがって $f(z)$ が正則な環状領域 $\Delta=\{z \mid 0<|z-z_0|<R_+\}$ が存在し $f(z)$ は z_0 のまわりで Lauren 級数展開が可能である。

除去可能な特異点 $f(z)$ が Δ で誘拐ならば Laurent 展開は主要部をもたない。したがって $f(z_0)\equiv\lim_{z\to z_0}f(z)=c_0$ と定義すれば $f(z)$ は z_0 で正則となり、Laurent 展開は Taylor 展開に一致する。このとき z_0 を除去可能な特異点という。

極 Laurent 展開が $f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_{-k}\neq 0$ となる正の整数 k があるとき、z_0 を k 位の極という。このとき $g(z)=(z-z_0)^kf(z)$ とすれば z_0 は $g(z)$ の除去可能な特異点となる。1 位の極を単純極ということがある。

真性特異点 主要部が無限級数となるとき z_0 を真性特異点という。このとき $\lim_{z\to z_0}f(z)$ は存在せず不定となる。

Note 6c. 留数定理

$f(z)$ の孤立特異点 z_0 のまわりの Laurent 展開の係数 $\{c_n\}$ のうちでとくに c_{-1} を $f(z)$ の z_0 における留数といい

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0)=c_{-1}(z_0)=\oint_{C(z_0)}f(z)\mathrm{d}z \quad (6.4)$$

と記す ($C(z_0)$ は z_0 の近傍を左にまわる閉経路)。とくに z_0 が k 位の極ならば

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(z-z_0)^kf(z) \quad (6.5)$$

となる。

一般の左まわりの閉経路 C のなかに存在する特異点が有限個の孤立特異点 z_k $(k = 1, \cdots, n)$ だけならば

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C(z_k)} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \tag{6.6}$$

と表される。これを留数定理という。

[6.1] 次の複素関数にたいして ( ) 内の孤立特異点のまわりの Laurent 展開とそこでの留数を求めよ。

$$(1)\ \frac{z}{(z-1)(z-2)},\quad (z=1), \qquad (2)\ z\sin\frac{1}{z},\quad (z=0), \qquad (3)\ \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)(z+2)},\quad (z=-1).$$

[6.2] 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ に対して次の環状領域に対する $z = 0$ のまわりでの Laurent 展開を求めよ。

$$(1)\ \Delta = \{z \mid 0 < |z| < 1\}, \qquad (2)\ \Delta = \{z \mid 1 < |z| < 2\}, \qquad (3)\ \Delta = \{z \mid 2 < |z| < \infty\}.$$

[6.3] 留数定理を用いて次の積分を求めよ。

$$(1)\ \oint_{C:|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-4}\mathrm{d}z, \qquad (2)\ \oint_{C:|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-3)}, \qquad (3)\ \oint_{C:|z|=3} \frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}z.$$

[6.4] Laguerre 多項式 $L_n(\zeta)$ の母関数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}\exp(-\dfrac{\zeta z}{1-z})$ を考える。

(1) $z = 1$ のまわりでの Laurent 展開を求めよ。

(2) $z = 0$ が正則点であるから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\zeta) z^n$$

という Taylor 展開が可能である。$L_n(\zeta)$ を求めよ。

[6.5] 環状領域 $0 < |z| < R$ で正則な関数が Laurent 展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ を持つとする。

(1) 自然数 k があって、$n < -k$ であるすべての n について $c_n = 0$ であれば、$z = 0$ は $f(z)$ の k 位の極であることを示せ。

(2) $z = 0$ が $f(z)$ の k 位の零点 (すべての $n < k$ に対して $c_n = 0$) であれば、$z = 0$ は $\dfrac{1}{f(z)}$ の k 位の極であることを示せ。

(3) $z = 0$ が $f(z)$ の真性特異点であれば、$z = 0$ は $\dfrac{1}{f(z)}$ の真性特異点であることを示せ。

[6.6] 次の問に答えよ。

(1) $|z| < R$ で収束するベキ関数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ がある。また、$\lim_{m\to\infty} z_m = 0$ である複素数列を $\{z_m\}$ とする。

i. すべての m について $f(z_m) = 0$ ならば、$f(z) = 0$ すなわちすべての n に対して $a_n = 0$ である。背理法を用いてこれを証明せよ。

ii. $|z| < R'$ で収束するベキ級数 $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ があって、すべての m について $f(z_m) = g(z_m)$ ならば、$f(z) = g(z)$ すなわちすべての n に対して $a_n = b_n$ であることを証明せよ。

(2) 領域 D で正則な関数 $f(z)$ がある。また、$\lim_{m\to\infty} z_m = z_0 (z_0 \in D)$ である D 内の複素数列を $\{z_m\}$ とする。

i. すべての m について $f(z_m) = 0$ ならば、D で $f(z) = 0$ であることを証明せよ。

ii. 領域 D で正則な関数 $g(z)$ があって、すべての m について $f(z_m) = g(z_m)$ ならば、$f(z) = g(z)$ であることを証明せよ (一致の定理)。