

物理数学演習 II — (7)
— 実積分への応用・その 1 —

(演習問題は <http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/> からダウンロードできます)

Note 7a. 三角関数を含む積分

積分区間 $[0, 2\pi]$ で有界な関数 $f(\cos \theta, \sin \theta)$ の積分

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (7.1)$$

は、変数変換 $e^{i\theta} = z$ をすることによって単位円 C 上の左まわりの経路積分

$$I = \oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \quad (7.2)$$

に等しいので、 C 内の留数によって計算することができる。

Note 7b. 無限区間の積分

複素平面の上半面で $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$) をみたす $f(z)$ の実軸上の無限区間積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (7.3)$$

は、上半面を半径 R の半円上で左にまわる経路 C_R を付け加えると経路が閉じるので、留数定理により

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res}(f(z))$$

となるが、左辺第二項の絶対値を (4.14) で評価すると

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \max_{z \in C_R} |f(z)| = \pi \max_{z \in C_R} |zf(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

となって結局

$$I = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res}(f(z)) \quad (7.4)$$

と計算できる。また $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ ($-\pi \leq \arg z \leq 0$) をみたす場合は下半面について同様に考えればよく、経路が右まわりになることに注意すれば次のように計算できる。

$$I = -2\pi i \sum_{\text{下半面}} \text{Res}(f(z)) \quad (7.5)$$

Note 7c. Fourier 型の積分

複素平面の上半面で $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$) をみたす $f(z)$ の実軸上の Fourier 型の無限区間積分 ($k > 0$ を実数とする)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{ikx} dx \quad (7.6)$$

は、上半面を半径 R の半円上で左にまわる経路 C_R を付け加えると経路が閉じるので、留数定理により

$$\int_{-R}^R f(x) e^{ikx} dx + \int_{C_R} f(z) e^{ikz} dz = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res}(f(z) e^{ikz})$$

となる。左辺第二項の絶対値を三角不等式で評価すると

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{ikz} dz \right| \leq \max_{z \in C_R} |f(z)| \int_{C_R} |e^{ikz}| dz = \max_{z \in C_R} |f(z)| \cdot 2R \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \theta} d\theta$$

となるが $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ を用いて積分を上から押えと

$$\leq \max_{z \in C_R} |f(z)| \cdot 2R \int_0^{\pi/2} e^{-2kR\theta/\pi} d\theta = \max_{z \in C_R} |f(z)| \cdot \frac{\pi}{k} (1 - e^{-kR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

となって結局

$$I = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res} (f(z) e^{ikz}), \quad (k > 0) \quad (7.7)$$

と計算できる。また $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ ($-\pi \leq \arg z \leq 0$) をみたしかつ $k < 0$ の場合は下半面に
いて同様に考えればよく、経路が右まわりになることに注意すれば次のように計算できる。

$$I = -2\pi i \sum_{\text{下半面}} \text{Res} (f(z) e^{ikz}), \quad (k < 0) \quad (7.8)$$

[7.1] 実数 $a > b \geq 0$ に対して次の等式を証明せよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \sin \theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \quad (7.9)$$

[7.2] 実数 a ($|a| > 1$) に対して次の等式を証明せよ。

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{\pi|a|}{(a^2 - 1)^{3/2}} \quad (7.10)$$

[7.3] 複素数 ζ ($|\zeta| \neq 1$) に対して次の積分の値を求めよ。

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\zeta \cos \theta + \zeta^2} \quad (7.11)$$

[7.4] 留数計算を利用して次の等式を証明せよ。

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \theta d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

[7.5] 次の積分の値を求めよ。

$$(1) I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}, \quad (2) I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

[7.6] 次の Fourier 型積分を求めよ。ただし k は任意の実数で $a > 0$ とする。

$$(1) I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x - ia} dx, \quad (2) I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx, \quad (3) I = \int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ikx}}{x^2 + a^2} dx.$$