物理数学演習 II — (7)
— 実積分への応用・その 1 —

(演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます)

Note 7a. 三角関数を含む積分

積分区間 $[0, 2\pi]$ で有界な関数 $f(\cos\theta, \sin\theta)$ の積分

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta \tag{7.1}$$

は、変数変換 $\mathrm{e}^{i\theta} = z$ をすることによって単位円 C 上の左まわりの経路積分

$$I = \oint_C f(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{7.2}$$

に等しいので、C 内の留数によって計算することができる。

Note 7b. 無限区間の積分

複素平面の上半面で $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ をみたす $f(z)$ の実軸上の無限区間積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x \tag{7.3}$$

は、上半面を半径 R の半円上で左にまわる経路 C_R を付け加えると経路が閉じるので、留数定理により

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \mathrm{Res}\ (f(z))$$

となるが、左辺第二項の絶対値を (4.14) で評価すると

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \pi R \max_{z\in C_R}|f(z)| = \pi \max_{z\in C_R}|zf(z)| \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

となって結局

$$I = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \mathrm{Res}\ (f(z)) \tag{7.4}$$

と計算できる。また $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ $(-\pi \le \arg z \le 0)$ をみたす場合は下半面について同様に考えればよく、経路が右まわりになることに注意すれば次のように計算できる。

$$I = -2\pi i \sum_{\text{下半面}} \mathrm{Res}\ (f(z)) \tag{7.5}$$

Note 7c. Fourier 型の積分

複素平面の上半面で $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ をみたす $f(z)$ の実軸上の Fourier 型の無限区間積分 ($k > 0$ を実数とする)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x \tag{7.6}$$

は、上半面を半径 R の半円上で左にまわる経路 C_R を付け加えると経路が閉じるので、留数定理により

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{ikz}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \mathrm{Res}\ (f(z)\mathrm{e}^{ikz})$$

となる。左辺第二項の絶対値を三角不等式で評価すると

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}z\right| \le \max_{z\in C_R}|f(z)|\int_{C_R}\left|\mathrm{e}^{ikz}\mathrm{d}z\right| = \max_{z\in C_R}|f(z)|\cdot 2R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-kR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

となるが $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$ を用いて積分を上から押えると

$$\le \max_{z\in C_R}|f(z)|\cdot 2R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-2kR\theta/\pi}\mathrm{d}\theta = \max_{z\in C_R}|f(z)|\cdot\frac{\pi}{k}(1-\mathrm{e}^{-kR}) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

となって結局

$$I = 2\pi i\sum_{\text{上半面}}\mathrm{Res}\,(f(z)\mathrm{e}^{ikz}), \qquad (k>0) \tag{7.7}$$

と計算できる。また $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ $(-\pi \le \arg z \le 0)$ をみたしかつ $k<0$ の場合は下半面について同様に考えればよく、経路が右まわりになることに注意すれば次のように計算できる。

$$I = -2\pi i\sum_{\text{下半面}}\mathrm{Res}\,(f(z)\mathrm{e}^{ikz}), \qquad (k<0) \tag{7.8}$$

[7.1] 実数 $a > b \ge 0$ に対して次の等式を証明せよ。

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a\pm b\cos\theta} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a\pm b\sin\theta} = \frac{2\pi}{(a^2-b^2)^{1/2}} \tag{7.9}$$

[7.2] 実数 a $(|a|>1)$ に対して次の等式を証明せよ。

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{\pi|a|}{(a^2-1)^{3/2}} \tag{7.10}$$

[7.3] 複素数 ζ $(|\zeta|\ne 1)$ に対して次の積分の値を求めよ。

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2\zeta\cos\theta+\zeta^2} \tag{7.11}$$

[7.4] 留数計算を利用して次の等式を証明せよ。

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = \pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{7.12}$$

[7.5] 次の積分の値を求めよ。

$$(1)\ I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}, \qquad (2)\ I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}.$$

[7.6] 次の Fourier 型積分を求めよ。ただし k は任意の実数で $a>0$ とする。

$$(1)\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x-ia}\mathrm{d}x, \qquad (2)\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \qquad (3)\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ikx}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$