

物理数学演習 II — (8)
— 実積分への応用・その 2 —

(演習問題は <http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/> からダウンロードできます)

Note 8a. Cauchy の主値積分

実軸上のある区間 $[a, b]$ 内に $f(x)$ の特異点 x_0 があるとき、積分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{x_0 - \epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow +0} \int_{x_0 + \epsilon_2}^b f(x)dx$$

が発散しても右辺の極限を同時にとると収束する場合がある。このような積分を Cauchy の主値積分といい次のように表す。

$$P \int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{x_0 - \epsilon} f(x)dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b f(x)dx \right) \quad (8.1)$$

通常の積分が収束すれば主値積分はその値に等しい。

Note 8b. 単純極のある無限区間の積分

$f(z)$ が実軸上の x_0 に単純極を持つ場合の実軸上の無限区間の主値積分

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-R}^{x_0 - \epsilon} f(z)dz + \int_{x_0 + \epsilon}^R f(x)dx \right) \quad (8.2)$$

を考える。Note 7b と同じように上半面を半径 R の半円上で左にまわる経路 C_R を付け加え、さらに x_0 を中心とした半径 ϵ の半円上を下側に左にまわる経路 C_ϵ を付け加えると経路が閉じるので留数定理が使える。上式の右辺の括弧内の積分を $I_{R,\epsilon}$ とおけば、その積分は

$$I_{R,\epsilon} + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\epsilon} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, x_0) + 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res}(f(z))$$

と表される。 C_ϵ 上の積分はパラメータ表示 $z = x_0 + \epsilon e^{i\theta}$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$) を用いて

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz = i \int_{\pi}^{2\pi} \{c_{-1} + f_+(x_0 + \epsilon e^{i\theta})\epsilon e^{i\theta}\} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} \pi i \text{Res}(f, x_0)$$

となる。ここで x_0 の近傍での Laurent 展開 $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - x_0} + f_+(z)$ を用いた。したがって

$$I = \pi i \text{Res}(f, x_0) + 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res}(f(z)) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz \quad (8.3)$$

と計算できる。下を右にまわる C_R を考えるときにも同様に考えればよく、経路が右まわりになることに注意すれば次のように計算できる。

$$I = -\pi i \text{Res}(f, x_0) - 2\pi i \sum_{\text{下半面}} \text{Res}(f(z)) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz \quad (8.4)$$

実際は $z \rightarrow \infty$ に対する Note 7b や Note 7c の条件などによって最後の項が消える方を適用するとよい。

[8.1] 次の主値積分を求めよ。ただし a, b を実数とし $a \neq 0$ とする。

$$(1) \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - b)}, \quad (2) \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx.$$

[8.2] 被積分関数の中で成立する関係式として

$$\frac{1}{x - x_0 \mp i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{x - x_0} \pm \pi i \delta(x - x_0) \quad (8.5)$$

と記すことがある（複号同順）。この意味は実軸上で正則な関数 $f(z)$ に対し

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \mp i\epsilon} dx = \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \pm \pi i f(x_0) \quad (8.6)$$

となることを表している。

(1) 上式が成り立つことを示せ。

(2) このことからしばしば Dirac のデルタ関数の一つの表式として

$$\delta(x - x_0) = \pm \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{x - x_0 \mp i\epsilon} \quad (8.7)$$

と記すことがある。右辺の虚部を実際にとれば $\frac{\epsilon}{\pi (x - x_0)^2 + \epsilon^2}$ となるが、これを用いて

$$f(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon dx}{\pi} \frac{f(x)}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \quad (8.8)$$

となることを確かめよ。

[8.3] 実軸上と上半面で正則な関数 $f(z)$ が $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$) を満たすものとする。

(1) 実数 x_0 に対し次の等式が成り立つことを示せ。

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \quad (8.9)$$

またこのことから、実軸上の関数の値を $f(x) = u(x) + iv(x)$ として

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x')}{x' - x} dx', \quad v(x) = -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x' - x} dx' \quad (8.10)$$

の関係が成り立つを確かめよ。これを Kramers–Kronig の関係式という。

(2) $u(x) = \frac{1}{1 + a^2 x^2}$ のとき、上の関係を満たす $f(z)$ を求めよ。