物理数学演習 II — (8)
— 実積分への応用・その 2 —

（演習問題は http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/ からダウンロードできます）

Note 8a. Cauchy の主値積分

実軸上のある区間 $[a,b]$ 内に $f(x)$ の特異点 x_0 があるとき、積分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon_1\to+0}\int_a^{x_0-\epsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon_2\to+0}\int_{x_0+\epsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

が発散しても右辺の極限を同時にとると収束する場合がある。このような積分を **Cauchy** の主値積分といい次のように表す。

$$\mathrm{P}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \equiv \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{8.1}$$

通常の積分が収束すれば主値積分はその値に等しい。

Note 8b. 単純極のある無限区間の積分

$f(z)$ が実軸上の x_0 に単純極を持つ場合の実軸上の無限区間の主値積分

$$I = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to0+}\left(\int_{-R}^{x_0-\epsilon} f(z)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{8.2}$$

を考える。**Note 7b** と同じように上半面を半径 R の半円上で左にまわる経路 C_R を付け加え、さらに x_0 を中心とした半径 ϵ の半円上を下側に左にまわる経路 C_ϵ を付け加えると経路が閉じるので留数定理が使える。上式の右辺の括弧内の積分を $I_{R,\epsilon}$ とおけば、その積分は

$$I_{R,\epsilon} + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}\,(f,x_0) + 2\pi i\sum_{\text{上半面}}\mathrm{Res}\,(f(z))$$

と表される。C_ϵ 上の積分はパラメータ表示 $z = x_0 + \epsilon\mathrm{e}^{i\theta}$ $(\pi\le\theta\le2\pi)$ を用いて

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z = i\int_\pi^{2\pi}\left\{c_{-1} + f_+(x_0+\epsilon\mathrm{e}^{i\theta})\epsilon\mathrm{e}^{i\theta}\right\}\mathrm{d}\theta \xrightarrow{\epsilon\to0+} \pi i\mathrm{Res}\,(f,x_0)$$

となる。ここで x_0 の近傍での Laurent 展開 $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z-x_0} + f_+(z)$ を用いた。したがって

$$I = \pi i\mathrm{Res}\,(f,x_0) + 2\pi i\sum_{\text{上半面}}\mathrm{Res}\,(f(z)) - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \tag{8.3}$$

と計算できる。下を右にまわる C_R を考えるときにも同様に考えればよく、経路が右まわりになることに注意すれば次のように計算できる。

$$I = -\pi i\mathrm{Res}\,(f,x_0) - 2\pi i\sum_{\text{下半面}}\mathrm{Res}\,(f(z)) - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \tag{8.4}$$

実際は $z\to\infty$ に対する **Note 7b** や **Note 7c** の条件などによって最後の項が消える方を適用するとよい。

[**8.1**] 次の主値積分を求めよ。ただし a, b を実数とし $a \neq 0$ とする。

$$(1)\ \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x-b)}, \qquad (2)\ \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{iax}}{x}\mathrm{d}x.$$

[**8.2**] 被積分関数の中で成立する関係式として

$$\frac{1}{x - x_0 \mp i\epsilon} = \mathrm{P}\frac{1}{x-x_0} \pm \pi i\ \delta(x-x_0) \tag{8.5}$$

と記すことがある (複号同順)。この意味は実軸上で正則な関数 $f(z)$ に対し

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \mp i\epsilon}\mathrm{d}x = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x \pm \pi i f(x_0) \tag{8.6}$$

となることを表している。

(1) 上式が成り立つことを示せ。

(2) このことからしばしば Dirac のデルタ関数の一つの表式として

$$\delta(x-x_0) = \pm\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\ \frac{1}{x - x_0 \mp i\epsilon} \tag{8.7}$$

と記すことがある。右辺の虚部を実際にとれば $\dfrac{\epsilon}{\pi}\dfrac{1}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}$ となるが、これを用いて

$$f(x_0) = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon \mathrm{d}x}{\pi}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \tag{8.8}$$

となることを確かめよ。

[**8.3**] 実軸上と上半面で正則な関数 $f(z)$ が $\lim\limits_{z\to\infty}|f(z)| = 0\ (0 \leq \arg z \leq \pi)$ を満たすものとする。

(1) 実数 x_0 に対し次の等式が成り立つことを示せ。

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\mathrm{d}x \tag{8.9}$$

またこのことから、実軸上の関数の値を $f(x) = u(x) + iv(x)$ として

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x')}{x'-x}\mathrm{d}x', \qquad v(x) = \frac{-1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x'-x}\mathrm{d}x' \tag{8.10}$$

の関係が成り立つを確かめよ。これを **Kramers–Kronig** の関係式という。

(2) $u(x) = \dfrac{1}{1+a^2x^2}$ のとき、上の関係を満たす $f(z)$ を求めよ。