物理数学演習 II — (9)
— 実積分への応用・その 3 —

（演習問題は `http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/` からダウンロードできます）

Note 9a. 分岐点

多価の複素関数 $f(z)$ の関数値が z_0 を原点とする無限小の円上で 1 周したときに元に戻らないとき、z_0 を $f(z)$ の**分岐点**という。また無限大の円上で 1 周したときに戻らないとき $z=\infty$ をひとつの分岐点と考えることがある。

分岐点 z_0 のまわりで $n(>1)$ 周してはじめて元の関数値に戻るとき z_0 を位数 n の**代数的分岐点**という。そのような n が存在しないとき（元に戻らないとき）z_0 を**対数的分岐点**という。

Note 9b. Riemann 面・切断

多価関数 $f(z)$ で指定される写像 $w=f(z)$ は複数の z 平面から w 平面への写像（一価関数）と考えることができる。このような複数枚の z 平面を **Riemann 面**という。$f(z)$ が連続であれば Riemann 面を移り変わる境界を考えると都合がよい。この境界を Riemann 面の**切断**という。Riemann 面上で閉じた経路を考えれば Cauchy の定理などがそのまま成り立つ。

Note 9c. 切断をまわる積分

$f(z)$ が正の実軸上で正則であり、ある実数 μ に対して $z\to 0,\infty$ でともに $z^{\mu+1}f(z)\to 0$ となるとき、正の実軸上の半無限区間積分

$$I=\int_0^\infty x^\mu f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^R x^\mu f(x)\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

を考える。非整数 μ の場合は被積分関数が一価ではないので正の実軸上に切断を入れて

$$\begin{array}{llll} C_0 : z=t, & (t=\epsilon\to R), & C_R : z=R\mathrm{e}^{i\theta}, & (\theta=0\to 2\pi), \\ C_{2\pi} : z=t\mathrm{e}^{2\pi i}, & (t=R\to\epsilon), & C_\epsilon : z=\epsilon\mathrm{e}^{i\theta}, & (\theta=2\pi\to 0). \end{array}$$

の 4 つの経路を渡った閉経路上での周回積分にすれば留数定理から次のようになる。

$$\left(\int_{C_0}+\int_{C_R}+\int_{C_{2\pi}}+\int_{C_\epsilon}\right)z^\mu f(z)\mathrm{d}z=\sum_{0\le\arg z<2\pi}\mathrm{Res}\,(z^\mu f(z))$$

左辺の第 2 項と第 4 項は与えられた条件からそれぞれ $R\to\infty,\epsilon\to 0+$ で消え第 1 項と第 3 項は

$$\int_{C_0}z^\mu f(z)\mathrm{d}z=\int_\epsilon^R x^\mu f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{C_{2\pi}}z^\mu f(z)\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{2\pi i\mu}\int_\epsilon^R x^\mu f(x)\mathrm{d}x$$

となるので結局次のように計算できる。

$$I=\frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{2\pi i\mu}}\sum_{0\le\arg z<2\pi}\mathrm{Res}\,(z^\mu f(z)) \tag{9.2}$$

[9.1] 次の関数の分岐点と位数を調べよ。また切断の仕方のひとつを図示せよ。

$$(1)\ f(z)=z^{\frac{1}{3}},\qquad (2)\ f(z)=(z-\alpha)^{\frac{3}{2}}(z-\beta)^{-\frac{1}{2}},\qquad (3)\ f(z)=z^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{3}}.$$

[9.2] 次の積分値を求めよ。

$$(1)\ \int_0^\infty\frac{x^a}{(x+1)^2}\mathrm{d}x,\ (-1<a<1),\qquad (2)\ \int_0^\infty\frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x,\ (0<a<1).$$