物理数学演習 II — (10)
— Fourier 級数とその応用 —

（演習問題は `http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/` からダウンロードできます）

Note 10a. Fourier 級数

区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ に対し

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right), \tag{10.1}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x. \tag{10.2}$$

で定義される級数 $f_{\mathrm{p}}(x)$ は

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \begin{cases} f(x) & x\text{ が連続点のとき} \\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] & x\text{ が不連続点のとき} \end{cases} \tag{10.3}$$

に収束する。これを $f(x)$ の **Fourier 級数**という。$f(x)$ が滑らかな閉区間においては $f_{\mathrm{p}}(x)$ は $f(x)$ に一様収束し、項別微分、項別積分が可能である。

[10.1] 区間 $-L \le x \le L$ で定義される次の関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を求めよ。

$$(1)\ \text{矩形波: } f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, \pm L, \\ -a, & -L < x < 0, \end{cases} \qquad (2)\ \text{鋸波: } f(x) = \begin{cases} a\dfrac{L+x}{L+b}, & -L \le x < b, \\ a\dfrac{L-x}{L-b}, & b \le x \le L, \end{cases}$$

[10.2] 区分的に滑らかな周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ に対する複素 Fourier 級数は

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{ik_n x}, \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{e}^{-ik_n x}\mathrm{d}x, \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{10.4}$$

と表される。**Note 10a** からこの式を導き、a_n, b_n を用いて複素 Fourier 係数 c_n を表せ。また $f(x)$ が実関数ならば $c_{-n} = c_n^*$ を満たすことを示せ。

[10.3] $0 \le x \le \ell$ において固定端条件 $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ と初期条件 $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x)$ の下に 1 次元波動方程式 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ($c > 0$: 定数) を考察する。

(1) この解が

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \cos\omega_n t + \frac{g_n}{\omega_n}\sin\omega_n t \right) \sin k_n x,$$

$$f_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin k_n x\mathrm{d}x, \qquad g_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin k_n x\mathrm{d}x, \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad \omega_n = ck_n$$

となることを示せ。

(2) 方程式が線密度 ρ 張力 T の弦の振動を表すときには $c^2 = T/\rho$ である。この弦のもつ力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{L} \left(\rho u_t^2 + T u_x^2\right)\mathrm{d}x$$

を求めよ。

(3) 初期条件 $f(x) = x(\ell - x), g(x) = 0$ の場合の解を計算せよ。