物理数学演習 II — (11)
— Fourier 変換とその応用 —

（演習問題は `http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/` からダウンロードできます）

Note 11a. Fourier 変換

区間 $-\infty < x < \infty$ で定義される関数 $f(x)$ に対し

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x\ f(x)\mathrm{e}^{-ikx} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ f(x)\mathrm{e}^{-ikx} \tag{11.1}$$

を $f(x)$ の Fourier 変換といい、その逆変換を

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f}(-k)](x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}k\ \hat{f}(k)\mathrm{e}^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\ \hat{f}(k)\mathrm{e}^{ikx} \tag{11.2}$$

で定義する。$f(x)$ が区分的に滑らかで $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ が存在すれば

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{11.3}$$

となり、さらに $f(x)$ が連続であればこれは $f(x)$ そのものである。

Note 11b. Fourier 変換の性質

次の関係が成り立つ。ただし、それぞれの変換は存在するものとする。

(a) $\mathcal{F}[af(x)+bg(x)] = a\hat{f}(k)+b\hat{g}(k)$ (b) $\mathcal{F}[f(x+a)] = \mathrm{e}^{ika}\hat{f}(k)$
(c) $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{iax}f(x)] = \hat{f}(k-a)$ (d) $\mathcal{F}[f^*(x)] = \hat{f}^*(k) = \hat{f}(-k)$
(e) $\mathcal{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right] = (ik)^n\hat{f}(k)$

Note 11c. 畳み込みの Fourier 変換

2 つの関数 $f(x), g(x)$ から作られる関数

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\ f(x')g(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\ f(x-x')g(x') \tag{11.4}$$

を f と g の合成積あるいは畳み込みという（単に $f*g(x)$ ともかく）。$f(x), g(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k), \hat{g}(k)$ とすれば、

$$\mathcal{F}[f*g](k) = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] = \hat{f}(k)\hat{g}(k), \qquad \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}](x) = (f*g)(x) \tag{11.5}$$

が成り立つ。

[11.1] **Note 11b** にある Fourier 変換の性質 (a)–(e) を確かめよ。

[11.2] (1) **Note 11c** の畳み込みの Fourier 変換の式が成り立つことを示せ。また、ふたつの関数の積 $f(x)g(x)$ の Fourier 変換は $\hat{f}(k), \hat{g}(k)$ を用いてどう表されるか。

(2) 畳み込みについて、$(f*g)(x) = (g*f)(x)$（交換則）と $((f*g)*h)(x) = (f*(g*h))(x)$（結合則）が成り立つことを示せ。

(3) 3 つの関数の畳み込み積分

$$(f{*}g{*}h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'' f(x'')g(x'-x'')h(x-x')$$

の Fourier 変換が $\mathcal{F}[f{*}g{*}h](k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)\hat{h}(k)$ で与えられることを示せ。

[11.3] 関数 $\psi(x)$ が $K(x,x')$ と $\varphi(x)$ を用いて

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\ K(x,x')\varphi(x') \tag{11.6}$$

と表されるとする（このような $K(x,x')$ を積分核ということがある)。

(1) $\psi(x), \varphi(x)$ の Fourier 変換を $\hat{\psi}(k), \hat{\varphi}(k)$ とすれば、

$$\hat{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\ \hat{K}(k,-k')\hat{\varphi}(k'), \qquad \hat{K}(k,k') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\ \mathrm{e}^{-ikx-ik'x'} K(x,x') \tag{11.7}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $K(x,x')$ が $x-x'$ のみの関数であるとき、すなわち $K(x,x') = G(x-x')$ とかくことができるとき $\hat{K}(k,k')$ と $\hat{G}(k)$ との関係を調べ、そのときには $\psi(x)$ と $\hat{\psi}(k)$ が **Note 11c** の畳み込みの Fourier 変換の関係になることを示せ。

[11.4] 次の関数の Fourier 変換を求めよ。ただし $a>0$ とする。

(1) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax}, & (x \geq 0) \\ 0, & (x<0) \end{cases}$, (2) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, (3) $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, (4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

[11.5] 実定数係数の n 階線形非同次常微分方程式

$$c_0 \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} + c_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots c_{n-1} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + c_n f(x) = \left(\sum_{m=0}^{n} c_m \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}} \right) f(x) = F(x) \tag{11.8}$$

の $-\infty < x < \infty$ における特解を求める。

(1) 方程式の両辺を Fourier 変換することによって $f(x)$ の Fourier 変換が

$$\hat{f}(k) = \left(\sum_{m=0}^{n} (ik)^{n-m} c_m \right)^{-1} \hat{F}(k) \tag{11.9}$$

で与えられることを示せ。

(2) この方程式の Green 関数、すなわち

$$\left(\sum_{m=0}^{n} c_m \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}} \right) G(x) = \delta(x) \tag{11.10}$$

を満たす解 $G(x)$ の Fourier 変換 $\hat{G}(k)$ を求め、その結果を用いて

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' G(x-x')F(x') \tag{11.11}$$

がひとつの特解となることを示せ。

(3) $F(x) = a\cos(kx+\varphi)$ (a, k, φ は定数) のとき、$\hat{G}(k)$ を用いて $f(x)$ を表し、それが $F(x) = a\mathrm{e}^{i(kx+\varphi)}$ に対する解の実部と等しいことを示せ。

[11.6] 摩擦と外力のある 1 次元調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \tag{11.12}$$

と表される（$m > 0, \gamma > 0, \omega_0 > 0$ の定数)。

(1) **[11.5]** の方法にしたがって $\hat{x}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-i\omega t} x(t)$ を考察することにより、ひとつの特解 $x(t)$ を求めよ。

(2) $F(x) = F_0 \cos\omega t$ (F_0, ωは定数) のときの解を求め、それが $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$ の形になることを示せ。A, ϕ はそれぞれどのように表されるか。