物理数学演習 II — (12)
— ラプラス変換とその応用 —

（演習問題は `http://jody.sci.hokudai.ac.jp/~nemoto/enshuuII/` からダウンロードできます）

Note 12a. Laplace 変換

区間 $0 \le x < \infty$ で定義される関数 $f(x)$ に対し

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\ f(x)\mathrm{e}^{-sx}$$

を $f(x)$ の Laplace 変換という（s は複素数）。$s = s_0$ のとき右辺の積分が絶対収束すれば $\mathrm{Re}\ s > \mathrm{Re}\ s_0$ である s についても絶対収束する。したがって $f(x)$ に応じて積分が絶対収束する s の実部の下限 σ_0 が存在し、それを Laplace 積分の収束軸という。

滑らかな関数 $f(x)$ に対する Laplace 逆変換は

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}](x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iL}^{\sigma+iL} \mathrm{d}s\ \tilde{f}(s)\mathrm{e}^{sx} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathrm{d}s\ \tilde{f}(s)\mathrm{e}^{sx}, \qquad (\sigma > \sigma_0)$$

で与えられる。積分経路は $s = \sigma$ をとおり虚数軸に平行な直線にとる。

Note 12b. Laplace 変換の性質

次の関係が成り立つ。ただし、それぞれの変換は存在するものとし、定数 a は正の実定数、b, c は複素定数とする。

$$\begin{aligned}
&(a)\quad \mathcal{L}[bf(x) + cg(x)] = b\tilde{f}(s) + c\tilde{g}(s) &&(b)\quad \mathcal{L}[\mathrm{e}^{cx}f(x)] = \tilde{f}(s-c)\\
&(c)\quad \mathcal{L}[f(ax)] = \frac{\tilde{f}(s/a)}{a} &&(d)\quad \mathcal{L}[f(x-a)\theta(x-a)] = \mathrm{e}^{-as}\tilde{f}(s)\\
&(e)\quad \mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} &&(f)\quad \mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n \tilde{f}(s)}{\mathrm{d}s^n}\\
&(g)\quad \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right] = s^n\tilde{f}(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m-1}\frac{\mathrm{d}^m f(0)}{\mathrm{d}x^m}
\end{aligned}$$

Note 12c. 畳み込みの Laplace 変換

$x < 0$ で $f(x) = 0, g(x) = 0$ と考えれば $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込みは

$$(f*g)(x) = \int_0^x \mathrm{d}x'\ f(x')g(x-x') = \int_0^x \mathrm{d}x'\ f(x-x')g(x')$$

となる。$f(x), g(x)$ の Laplace 変換を $\tilde{f}(s), \tilde{g}(s)$ とすれば、

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s), \qquad \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}\tilde{g}](x) = (f*g)(x)$$

が成り立つ。

[12.1] (1) **Note 12b** にある Laplace 変換の性質 (a)–(g) を確かめよ。

(2) 次の性質を確かめよ。

$$\begin{aligned}
&(a)\quad \mathcal{L}\left[\int_0^x \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n f(x_n)\right] = \frac{\tilde{f}(s)}{s^n}\\
&(b)\quad \mathcal{L}\left[x^{-n}f(x)\right] = \int_s^\infty \mathrm{d}s_1\int_{s_1}^\infty \mathrm{d}s_2\cdots\int_{s_{n-1}}^\infty \mathrm{d}s_n\tilde{f}(s_n)
\end{aligned}$$

[12.2] **Note 12c** の畳み込みの Laplace 変換の式が成り立つことを示せ。

[12.3] (1) 次の関数の Laplace 変換を求めよ。ただし a は正の実定数である。それぞれの収束軸はどこか。

$$(a)\ \cos ax,\quad (b)\ \sin ax,\quad (c)\ \cosh ax,\quad (d)\ \sinh ax.$$

(2) 複素積分を実行して次の関数の Laplace 逆変換を求めよ。ただし a は正の実定数である。

$$(a)\ \frac{s}{s^2+a^2},\quad (b)\ \frac{a}{s^2+a^2},\quad (c)\ \frac{s}{s^2-a^2},\quad (d)\ \frac{a}{s^2-a^2}.$$

[12.4] Laplace 変換を用いて次の定数係数線形常微分方程式の $t \geq 0$ における解を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) & \dot{x}+cx=F(t), & \text{初期条件}: x(0)=x_0 \\ (2) & \ddot{x}+2b\dot{x}+cx=F(t), & \text{初期条件}: x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0 \end{array}$$

[12.5] 与えられた関数 $g(x), h(x)$ に対し、

$$f(x)=g(x)+\int_0^x \mathrm{d}x'\ h(x-x')f(x')$$

という形の $f(x)$ に対する積分方程式を考える。

(1) 両辺の Laplace 変換をとることにより、$\tilde{f}(s)=\dfrac{\tilde{g}(s)}{1-\tilde{h}(s)}$ であることを示せ。

(2) $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}x'\ \sin(x-x')f(x')$ を解け。

[12.6] 複素関数としての gamma 関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{d}u\ u^{z-1}\mathrm{e}^{-u}, \qquad (\mathrm{Re}\ z>0)$$

で与えられる。

(1) $\mathcal{L}[x^{\alpha-1}]=s^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$ であることを示せ。ただし Re $\alpha>0$ とする。

(2) 畳み込みの Laplace 変換を用いて次の等式を示せ。ただし Re $\alpha>0$, Re $\beta>0$ とする。

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\ u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

この関数を beta 関数 $B(\alpha,\beta)$ という。