

問 1 次の2実変数の実関数 $u(x, y)$ について、複素数 $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ の実部が次の $u(x, y)$ で与えられるとき、それぞれについて定数 a を求め $f(z)$ を z の関数として表せ。

1. $u(x, y) = x^2 + ay^2$

2. $u(x, y) = e^{ax} \cos y$

解答例 $u(x, y)$ は正則関数の実部であるから $\Delta u(x, y) = 0$ をみたすように a を定める。そうすればその $u(x, y)$ に対して Cauchy-Riemann の微分方程式 $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ したがって $dv = -u_y dx + u_x dy$ をみたすような $v(x, y)$ が存在し、例えば原点からの積分経路 $(0, 0) \rightarrow (0, y) \rightarrow (x, y)$ によって

$$v(x, y) = v_0 + \int_0^y u_x(0, y') dy' - \int_0^x u_y(x', y) dx' \quad (1)$$

と計算できる ($v_0 = v(0, 0)$ は積分定数)。この v を虚部として $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ を求めればよい。

1. $\Delta u = 2 + 2a = 0$ より $a = -1$ となる。したがって $u_x = 2x$, $u_y = 2y$ を式 (1) に代入して積分を行なえば

$$v(x, y) = v_0 + 2xy$$

となり

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy + iv_0 = (x + iy)^2 + iv_0 = z^2 + iv_0$$

が得られる。

2. $\Delta u = (a^2 - 1)e^{ax} \cos y = 0$ より $a = \pm 1$ となる。したがって $u_x = \pm e^{\pm x} \cos y$, $u_y = -e^{\pm x} \sin y$ (複号同順) を式 (1) に代入して積分を行なえば

$$v(x, y) = v_0 \pm e^{\pm x} \sin y$$

となり

$$f(z) = e^{\pm x}(\cos y \pm i \sin y) + iv_0 = e^{\pm(x+iy)} + iv_0 = e^{\pm z} + iv_0$$

が得られる。

問 2 Laguerre 多項式 $L_n(\zeta)$ の母関数 $f(z) = \frac{1}{1-z} \exp(-\frac{\zeta z}{1-z})$ を考える。

1. $z = 1$ のまわりでの Laurent 展開を求めよ。

2. $z = 0$ は正則点であるから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\zeta) z^n$$

という Taylor 展開が可能である。 $L_3(\zeta)$ を求めよ。

解答例

1. $w = z - 1$ において代入すると

$$f(z) = f(1+w) = -\frac{1}{w} \exp\left(\frac{\zeta(1+w)}{w}\right) = -\frac{e^\zeta}{w} \exp\left(\frac{\zeta}{w}\right)$$

指数関数の展開 $\exp\left(\frac{\zeta}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\zeta^n}{w^n}$ を代入して整理すれば

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-e^\zeta}{n!} \frac{\zeta^n}{w^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-e^\zeta}{n!} \frac{\zeta^n}{(z-1)^{n+1}}$$

が得られる。

2. 今度は $\eta = \frac{1}{1-z}$ において $f(z) = \eta \exp(-\zeta z \eta)$ の指数関数を展開すれば

$$f(z) = \eta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta z \eta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta z)^k}{k!} \eta^{k+1}$$

ここで η^{k+1} を $z = 0$ のまわりで Taylor 展開すれば

$$\eta^{k+1} = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} {}^nC_k z^{n-k}$$

が得られるので、代入して整理すれば

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{{}^nC_k}{k!} (-\zeta)^k z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{{}^nC_k}{k!} (-\zeta)^k z^n$$

したがって n 次の係数から $L_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n \frac{{}^nC_k}{k!} (-\zeta)^k$ が得られる。とくに $n = 3$ とすれば

$$L_3(\zeta) = 1 - 3\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{6}\zeta^3$$

となる。

問 3 自然数 n に対し、次のような複素関数 $f(z)$ とその実軸上の積分 I_n を考える。

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}, \quad I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

1. $f(z)$ の $2n$ 個の極とその留数をすべて求めよ。また、 $n=2$ のときについて複素平面上における極の位置を図示せよ。
2. 複素積分を用いて I_n を求めよ。

解答例

1. $g(z) = 1 + z^{2n}$ とおけば $f(z)$ の極は $g(z)$ の零点に一致する。 $g(z)$ の根は $z^{2n} = -1$ をみたすがこの方程式を $z^{2n} = e^{\pi i} e^{2k\pi i}$ (k は整数) と考えればそのひとつの解は $z_k = e^{\frac{\pi i}{2n}} e^{\frac{k\pi i}{n}} = z_0 e^{\frac{k\pi i}{n}}$ ($z_0 = e^{\frac{\pi i}{2n}}$) と表すことができる。 $z_0, z_1, \dots, z_{2n-1}$ は z_0 を順次 $\frac{\pi}{n}$ ずつ回転させたものであるからすべて異なり、また $z_{2n} = z_0, z_{2n+1} = z_1, \dots$ となる。こうして互いに異なる複素根がちょうど $2n$ 個あることがわかり、したがってすべて $f(z)$ の単純極である。 $g(z_k) = 0$ に注意すれば対応する留数は

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{g(z) - g(z_k)} = \frac{1}{g'(z_k)}$$

と計算できることになり、

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2n z_k^{2n-1}} = \frac{z_k}{2n z_k^{2n}} = -\frac{z_k}{2n} = -\frac{z_0}{2n} e^{\frac{k\pi i}{n}}$$

が得られる。($n=2$ のときの図は略)

2. $f(-x) = f(x)$ であるから全無限の積分は $2I_n$ に等しい。この全無限の積分を求めたいが、 $n \geq 1$ であるから $\lim_{z \rightarrow \infty} |z f(z)| = 0$ となり、上半面 (または下半面) を通る半円を付け加える方法が使える。上半面を通して閉経路にしたとき、その半径を無限大にとった極限で

$$2I_n = 2\pi i \sum_{\text{上半面の } z_k} \text{Res}(f, z_k)$$

となる。 $\text{Im} z_k = \sin(\frac{1+2k}{2n}\pi)$ であるから上半面にある z_k は $k = 0, 1, \dots, n-1$ のときである。したがって

$$2I_n = -2\pi i \frac{z_0}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k\pi i}{n}} = -2\pi i \frac{z_0}{2n} \frac{e^{\frac{n\pi i}{n}} - 1}{e^{\frac{\pi i}{n}} - 1} = 2\pi i \frac{z_0}{2n} \frac{2}{e^{\frac{\pi i}{n}} - 1}$$

ここで $z_0 = e^{\frac{\pi i}{2n}}$ に注意すれば

$$I_n = \frac{\pi}{2n} \frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{-\frac{\pi i}{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

が得られる。