物理数学演習 II 中間試験問題解答例

2001.12.20

問 1 次の 2 実変数の実関数 $u(x,y)$ について、複素数 $z=x+iy$ の正則関数 $f(z)$ の実部が次の $u(x,y)$ で与えられるとき、それぞれについて定数 a を求め $f(z)$ を z の関数として表せ。

1. $u(x,y)=x^2+ay^2$
2. $u(x,y)=\mathrm{e}^{ax}\cos y$

解答例　$u(x,y)$ は正則関数の実部であるから $\Delta u(x,y)=0$ をみたすように a を定める。そうすればその $u(x,y)$ に対して Cauchy–Riemann の微分方程式 $v_x=-u_y,\ v_y=u_x$ したがって $\mathrm{d}v=-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y$ をみたすような $v(x,y)$ が存在し、例えば原点からの積分経路 $(0,0)\to(0,y)\to(x,y)$ によって

$$v(x,y)=v_0+\int_0^y u_x(0,y')\mathrm{d}y'-\int_0^x u_y(x',y)\mathrm{d}x' \tag{1}$$

と計算できる（$v_0=v(0,0)$ は積分定数）。この v を虚部として $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を求めればよい。

1. $\Delta u=2+2a=0$ より $a=-1$ となる。したがって $u_x=2x,\ u_y=2y$ を式 (1) に代入して積分を行なえば
$$v(x,y)=v_0+2xy$$
となり
$$f(z)=x^2-y^2+2ixy+iv_0=(x+iy)^2+iv_0=z^2+iv_0$$
が得られる。

2. $\Delta u=(a^2-1)\mathrm{e}^{ax}\cos y=0$ より $a=\pm1$ となる。したがって $u_x=\pm\mathrm{e}^{\pm x}\cos y,\ u_y=-\mathrm{e}^{\pm x}\sin y$（複号同順）を式 (1) に代入して積分を行なえば
$$v(x,y)=v_0+\pm\mathrm{e}^{\pm x}\sin y$$
となり
$$f(z)=\mathrm{e}^{\pm x}(\cos y\pm\sin y)+iv_0=\mathrm{e}^{\pm(x+iy)}+iv_0=\mathrm{e}^{\pm z}+iv_0$$
が得られる。

問 **2** Laguerre 多項式 $L_n(\zeta)$ の母関数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}\exp(-\dfrac{\zeta z}{1-z})$ を考える。

1. $z = 1$ のまわりでの Laurent 展開を求めよ。
2. $z = 0$ は正則点であるから
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\zeta) z^n$$
という Taylor 展開が可能である。$L_3(\zeta)$ を求めよ。

解答例

1. $w = z - 1$ とおいて代入すると
$$f(z) = f(1+w) = -\frac{1}{w}\exp\left(\frac{\zeta(1+w)}{w}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{w}\exp\left(\frac{\zeta}{w}\right)$$
指数関数の展開 $\exp\left(\dfrac{\zeta}{w}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\zeta^n}{w^n}$ を代入して整理すれば
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{e}^{\zeta}}{n!}\frac{\zeta^n}{w^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{e}^{\zeta}}{n!}\frac{\zeta^n}{(z-1)^{n+1}}$$
が得られる。
2. 今度は $\eta = \dfrac{1}{1-z}$ とおいて $f(z) = \eta\exp(-\zeta z\eta)$ の指数関数を展開すれば
$$f(z) = \eta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\zeta z\eta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\zeta z)^k}{k!}\eta^{k+1}$$
ここで η^{k+1} を $z = 0$ のまわりで Taylor 展開すれば
$$\eta^{k+1} = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_k z^{n-k}$$
が得られるので、代入して整理すれば
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{{}_nC_k}{k!}(-\zeta)^k z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k!}(-\zeta)^k z^n$$
したがって n 次の係数から $L_n(\zeta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{k!}(-\zeta)^k$ が得られる。とくに $n = 3$ とすれば
$$L_3(\zeta) = 1 - 3\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{6}\zeta^3$$
となる。

問 **3** 自然数 n に対し、次のような複素関数 $f(z)$ とその実軸上の積分 I_n を考える。

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}, \qquad I_n = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}.$$

1. $f(z)$ の $2n$ 個の極とその留数をすべて求めよ。また、$n=2$ のときについて複素平面上における極の位置を図示せよ。
2. 複素積分を用いて I_n を求めよ。

解答例

1. $g(z) = 1+z^{2n}$ とおけば $f(z)$ の極は $g(z)$ の零点に一致する。$g(z)$ の根は $z^{2n} = -1$ をみたすがこの方程式を $z^{2n} = \mathrm{e}^{\pi i}\mathrm{e}^{2k\pi i}$ (k は整数) と考えればそのひとつの解は $z_k = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2n}}\mathrm{e}^{\frac{k\pi i}{n}} = z_0\mathrm{e}^{\frac{k\pi i}{n}}$ $(z_0 = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2n}})$ と表すことができる。$z_0, z_1, \cdots, z_{2n-1}$ は z_0 を順次 $\dfrac{\pi}{n}$ ずつ回転させたものであるからすべて異なり、また $z_{2n} = z_0, z_{2n+1} = z_1, \cdots$ となる。こうして互いに異なる複素根がちょうど $2n$ 個あることがわかり、したがってすべて $f(z)$ の単純極である。$g(z_k) = 0$ に注意すれば対応する留数は

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z) = \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{g(z)} = \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{g(z)-g(z_k)} = \frac{1}{g'(z_k)}$$

と計算できることになり、

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} = -\frac{z_k}{2n} = -\frac{z_0}{2n}\mathrm{e}^{\frac{k\pi i}{n}}$$

が得られる。($n=2$ のときの図は略)

2. $f(-x) = f(x)$ であるから全無限の積分は $2I_n$ に等しい。この全無限の積分を求めたいが、$n \geq 1$ であるから $\lim_{z\to\infty}|zf(z)| = 0$ となり、上半面 (または下半面) を通る半円を付け加える方法が使える。上半面を通って閉経路にしたとき、その半径を無限大にとった極限で

$$2I_n = 2\pi i \sum_{\text{上半面の } z_k} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

となる。$\mathrm{Im}z_k = \sin(\frac{1+2k}{2n}\pi)$ であるから上半面にある z_k は $k = 0, 1, \cdots, n-1$ のときである。したがって

$$2I_n = -2\pi i\frac{z_0}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{k\pi i}{n}} = -2\pi i\frac{z_0}{2n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{n\pi i}{n}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{n}}-1} = 2\pi i\frac{z_0}{2n}\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{n}}-1}$$

ここで $z_0 = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2n}}$ に注意すれば

$$I_n = \frac{\pi}{2n}\frac{2i}{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2n}}} = \frac{\pi}{2n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

が得られる。